USO DE EXCEL PARA LA MODELACIÓN DE UNA ACTIVIDAD DE CRECIMIENTO POBLACIONAL

Verónica Vargas-Alejo
Universidad de Guadalajara
veronica.vargas@academicos.udg.mx

Luis E. Montero-Moguel
Universidad de Guadalajara
montero_hk@yahoo.com.mx

En este estudio se muestran los modelos que estudiantes de carreras de administración y contabilidad construyeron al realizar una actividad cercana a la vida real, con el uso de Excel. Se analizan las representaciones y las ideas exhibidas por los alumnos cuando usaron el software. La metodología fue cualitativa. El marco teórico fue la Perspectiva de Modelos y Modelación. Los resultados muestran que el uso de la herramienta permitió explorar de manera dinámica conceptos matemáticos como: covariación, tasa de cambio y función exponencial. Los estudiantes formularon conjeturas, argumentos, explicaciones y justificaciones.

Keywords: Modelación matemática, Resolución de problemas, Tecnología.

Las funciones son objetos matemáticos cuya comprensión requiere de conocimiento de conceptos como variación, tasa de cambio, dominio, rango, función inversa (logarítmica), entre otros; su aprendizaje está relacionado con el desarrollo de un razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002). De acuerdo con investigaciones basadas en la Perspectiva de Modelos y Modelación [PMM] (Lesh & Doerr, 2003), la resolución de situaciones cercanas a la vida real, puede apoyar la comprensión de conceptos matemáticos como función exponencial (Ärlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013).

En esta ponencia se presentan resultados obtenidos al implementar una actividad, diseñada con base en un Crecimiento poblacional (CP) y asociada a la función exponencial. Se analiza el potencial de la actividad en términos de las habilidades y los conceptos matemáticos que los estudiantes revelaron y desarrollaron. Se responden las preguntas de investigación siguientes: 1) ¿qué modelos construyeron los estudiantes de carreras de contabilidad y administración para resolver esta actividad CP? Es decir, 2) ¿qué representaciones, conjeturas, creencias, argumentos y conocimiento matemático utilizaron? 3) ¿cómo apoyó Excel la construcción, modificación y extensión del conocimiento? Se utilizaron los seis principios de diseño de las Actividades Provocadoras de Modelos [MEA por sus siglas en inglés: Model Eliciting Activities] (Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski, 2003) para analizar el potencial de la actividad CP.

Es importante mencionar que el profesor que diseñó e implementó la actividad CP forma parte de un proyecto mexicano de investigación multi-nivel (Doerr & Lesh, 2003), centrado en la PMM. Este profesor participó en un proceso de formación de doce sesiones, de dos horas cada una, donde el profesor, apoyado por investigadores, a) observó la implementación de la MEA del Problema del avión de papel (Lesh & Doerr, 2003; Universidad de Minnesota, 2008), b) discutió los resultados con investigadores, c) implementó la MEA del Hotel (adaptada de Aliprantis & Carmona, 2003), c) diseñó la actividad CP aquí presentada, y d) preparó e implementó la actividad. En este documento, por falta de espacio, sólo se describen los resultados de la implementación.

Marco Teórico

Aprender matemáticas es un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales, que cambian de manera continua, se modifican, extienden y refinan a partir de las interacciones del estudiante con su entorno (los profesores y compañeros) y al resolver problemas (Lesh, 2010). Para desarrollar sistemas conceptuales la PMM (Doerr, 2016) propone estructurar experiencias para que el alumno exprese, analice, pruebe, revise y refine sus formas de pensamiento durante el proceso de diseño de herramientas conceptuales podersoas que incorporen construcciones matemáticas significativas (Sriraman & Lesh, 2006). La PMM sugiere el uso de Actividades Provocadoras de Modelos (MEA) en el aula para promover que el alumno manipule, comparta, modifique y reutilice herramientas conceptuales, para construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos (Lesh & Doerr, 2003). Interesa que los estudiantes logren desarrollar procesos de matematización; es decir, cuantificar, dimensionar, coordinar, categorizar, simbolizar algebraicamente y sistematizar objetos, relaciones, acciones, patrones y regularidades relevantes (Lesh & Doerr, 2003). Lo importante, por lo tanto, es el proceso de construcción de modelos, más que el modelo mismo ya que interesa que el estudiante desarrolle habilidades y conocimiento matemático.

La PMM propone diseñar MEA's a través del uso de seis principios (Lesh et al., 2003, p. 43): de significado de personal (Principio de la realidad), de construcción del modelo, de autoevaluación, de externalización del modelo (Principio de la documentación del modelo), del prototipo simple y de generalización del modelo. Estos principios fueron usados para el diseño de la actividad CP y el análisis de los datos recolectados, ya que interesaba desarrollar habilidades y conocimiento matemático en los estudiantes. La tecnología jugó un papel importante por su potencial para la construcción de representaciones.

Metodología

Los participantes en este estudio fueron un grupo de un cinco alumnos (adultos inmersos en el campo laboral con edades entre 24 y 34 años) que estaban cursando la materia de Matemáticas aplicadas a los negocios en el primer cuatrimestre de la Licenciatura en Administración y Licenciatura en Contabilidad. La sesión se llevó a cabo en un aula de cómputo. El Equipo 1 se conformó por tres alumnos (S1, S2, S3) y el Equipo 2 por dos alumnos (S4, S5). S1, S2 y S5 eran estudiantes de administración y S3 y S4 de contabilidad. El estudiante S1 tenía las mejores calificaciones del grupo, la estudiante S4 tenía las más bajas calificaciones y participaba poco en el aula; además, S4 trabajaba como vendedora de seguros en horas extraclase.

Santiago Vázquez, alumno egresado de la carrera de administración de nuestro campus UVM GDL SUR, está haciendo su Maestría en Desarrollo Local y Territorio. Su profesor le solicitó que elabore una carta dirigida a la Secretaría de infraestructura vial sobre el crecimiento poblacional de la zona metropolitana de Guadalajara, para que sea tomada en cuenta en los próximos proyectos de infraestructura vial.

Santiago investigó y encontró que en el año 2018 la población de la zona metropolitana de Guadalajara llegó a 4.299 millones y que el promedio de crecimiento es de un 1.7% anual.

Para que la carta tenga el impacto necesario en la Secretaría, Santiago necesita enviar un procedimiento que permita conocer cuál sería la población en los años 2020, 2022, 2024, 2030, 2040, 2041, 2100, expresar si la variación es constante y saber en qué año habrán 6 millones de habitantes, 7.560 millones, 8.232 millones y para qué año la población se duplicará respecto a la del año 2018.

Ayúdale a Santiago a redactar la carta. Describe el procedimiento de tal manera que pueda ser útil para describir el crecimiento poblacional de cualquier otra ciudad o del mundo.

Figura 1: Situación problema de la Actividad CP

La actividad CP, denominada Crecimiento poblacional en la zona metropolitana, estaba compuesta por tres páginas, las dos primeras contenían la actividad de calentamiento diseñada con base en la problemática del incremento de tránsito vehicular como consecuencia del crecimiento poblacional de la zona metropolitana de Guadalajara. La tercera página (Figura 1) contenía el problema, el cual podía resolverse mediante procedimientos de tipo: tabular (recursivo), tabular (relación funcional), gráfico y algebraico. Los datos fueron extraídos de fuentes gubernamentales (Gutiérrez-Pulido et al, 2011).

La actividad CP se implementó en un periodo de tres horas y media en un aula de cómputo, en dos sesiones. Las fases fueron: 1) individual y luego grupal para la lectura del artículo de periódico, 2) individual, equipo y grupal para la resolución del problema y 3) individual para resolver un ejercicio tipo libro de texto. El papel del docente fue como observador y facilitador. Los criterios de análisis utilizados para describir y analizar los modelos elaborados por los estudiantes en Excel y el potencial de la actividad fueron los seis principios para el diseño de APM.

Resultados y discusión de resultados

Se analiza el potencial de la actividad CP en términos del desarrollo de conocimiento, creencias y habilidades matemáticas.

Principio de significado personal

La lectura individual de la nota periodística permitió que los estudiantes se familiarizan con el contexto y se sintieran motivados para resolver la actividad. Mencionaron su preocupación y reflexión sobre el crecimiento poblacional de su ciudad y la influencia de este fenómeno en los problemas de vialidad de la zona metropolitana de Guadalajara.

Principios de construcción, externalización y documentación de modelos

Modelos iniciales. El equipo 1 elaboró su procedimiento en la hoja electrónica de cálculo. Los integrantes del equipo 2 realizaron primero operaciones en su cuaderno con apoyo de la calculadora; posteriormente, trabajaron en la hoja electrónica de Excel y construyeron dos representaciones: una tabular y una gráfica.

Covariación y tasa de cambio en el modelo del equipo 1. En la tabla elaborada por el equipo 1 los estudiantes detectaron que la población (P) variaba, es decir, era diferente cada año e identificaron cómo variaba. Detectaron un patrón de comportamiento, y escribieron una fórmula recursiva para P. La conjetura de S1 y S3 fue que el crecimiento poblacional era lineal y la tasa (1.7) era constante, No reconocieron la relación exponencial.

Covariación y tasa de cambio en el modelo del equipo 2. El equipo 2, al igual que el equipo 1, tuvo dificultades iniciales para identificar si la tasa de cambio era constante o no. La conjetura de S5 fue que el crecimiento era lineal y la tasa era constante (1.7). Sin embargo, S4, después de realizar un par de operaciones, detectó que la variación no era constante y que debían realizar un procedimiento similar al que hacía de manera cotidiana en su trabajo, como vendedora de seguros. El equipo 2 escribió una relación recursiva. A diferencia del equipo 1, sintetizó todas las operaciones. Es decir, utilizó la población del año dado (actual) para determinar la del próximo año, y obtuvo el crecimiento anual de la población. Este equipo tuvo menos dificultades para identificar el comportamiento exponencial. Aunque S1 (del equipo 1) escuchó a S4 mencionar que la variación no era constante, no la tomó en cuenta; lo anterior,

debido a la creencia de que S4 era la compañera de más bajo desempeño en su clase de matemáticas.

Función inversa. Ambos equipos tuvieron dificultades para identificar en qué año habría 6, 7.560 y 8.232 millones de habitantes. Pero, pudieron estimar posibles respuestas a partir las tablas de datos construidas en la hoja electrónica.

El modelo final de los equipos. En la discusión grupal de modelos cada equipo leyó su carta, la cual describía los procedimientos realizados. Cuando el equipo 2 presentó la gráfica, S1 dijo en voz alta: “es cierto, el crecimiento no es constante”. Tal como se menciona en la literatura de investigación (Lesh & Yoon, 2004), los estudiantes refinaron su pensamiento sobre el problema. Los estudiantes modificaron el primer modelo lineal y construyeron un modelo de crecimiento exponencial.

El uso de Excel permitió a los integrantes de ambos equipos organizar la información dada en el problema y escribir en lenguaje de la hoja electrónica una relación entre las cantidades, la cual (al ser *arrastrada*) posibilitó analizar cómo variaban las cantidades. En la literatura de investigación (Friedlander, 1999) se considera que la relación recursiva está lejana de apoyar la construcción de una representación algebraica de la covariación. Sin embargo, de acuerdo con el NCTM (2000) es importante que en el salón de clases surja la definición iterativa o recursiva para la función y debe ser comparada con $P(n)$ para ayudar a los alumnos a ver las ventajas y limitaciones de ambas. Esto fue retomado más tarde por el docente.

Principio del prototipo simple y de generalización del modelo

S4 (integrante del equipo 2) identificó que el modelo construido era útil para resolver problemas con otro tipo de contexto. No así los demás estudiantes.

Extensión del conocimiento de los estudiantes con apoyo dirigido por el docente

Después de la discusión grupal, el docente, con base en los modelos construidos, promovió la generalización y escritura de la representación algebraica $P(n) = 4.299(1.017)^n$ para alentar la discusión de los estudiantes en términos de la covariación y uso de la función inversa. En una sesión posterior el profesor propuso la resolución de un problema enunciado en forma verbal, de interés compuesto, del tipo de libro de texto. Los alumnos resolvieron sin dificultades el problema y explicaron al docente el comportamiento de crecimiento exponencial que involucraba, es decir, lograron utilizar su conocimiento para describir una situación problemática en otro contexto.

Conclusiones

Con respecto a las preguntas de investigación planteadas inicialmente, se puede mencionar lo siguiente. El uso de Excel para la elaboración de modelos con representaciones tabulares para resolver el problema permitió a los estudiantes concentrarse en el proceso de revisar cómo variaban las cantidades, al *arrastrar* la fórmula recursiva construida con lenguaje de la hoja electrónica. El uso de la representación gráfica posibilitó que en la discusión grupal los integrantes del equipo 1 modificaran sus conjeturas respecto al comportamiento lineal, e identificaran el comportamiento exponencial. Si bien es cierto, los estudiantes no construyeron una relación algebraica para $P(t)$, pero identificaron la relación recursiva en el lenguaje de la hoja electrónica, la cual les permitió contestar varias de las preguntas planteadas y, además,

comprender la situación. El apoyo del profesor fue fundamental para construir y dar sentido a la relación algebraica.

La resolución de la actividad CP, posibilitó que los estudiantes construyeran varios modelos, los manipularan, compartieran y predijeran el comportamiento de la situación. Expresaron sus ideas sobre la variación y tasa de cambio, las analizaron y revisaron; observaron patrones, relaciones y regularidades, es decir, los estudiantes desarrollaron habilidades y conocimiento matemático, lo cual es importante en el aprendizaje de las matemáticas. Un aspecto que no se trabajó en el aula fue la exploración del carácter dinámico de los modelos al cambiar las cantidades iniciales y la tasa de cambio para generar familias de problemas, queda pendiente propiciar y analizar estas acciones en posteriores estudios.

USING EXCEL FOR THE MODELING OF A POPULATION GROWTH ACTIVITY

In this study we show the models that students of administration and accounting careers built when performing an activity close to the real life, with the use of Excel. The representations and ideas exhibited by the students when they used the software are analyzed. The methodology was qualitative. The theoretical framework was the Models and Modeling Perspective. The results show that the use of the tool allowed the dynamic exploration of mathematical concepts such as: covariation, rate of change and exponential function. The students formulated conjectures, arguments, explanations and justifications.

Keywords: Modeling, Problem solving, Technology.

Functions are mathematical objects whose understanding requires knowledge of concepts such as variation, rate of change, domain, range, inverse function (logarithmic), among others; their learning is related to the development of covariational reasoning (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002). According to research based on the Models and Modeling Perspective [MMP] (Lesh & Doerr, 2003), the resolution of situations close to the real life can support the understanding of mathematical concepts as exponential function (Ärlebäck, Doerr, & O 'Neil, 2013).

In this paper we present results obtained when implementing an activity, based on a population growth (CP), and associated with the exponential function. The potential of the activity is analyzed in terms of the skills and mathematical concepts that the students revealed and developed. The following research questions are answered: 1) What models did the students of the Bachelor of Administration and Bachelor of Accounting build to solve this CP activity? That is, 2) what representations, conjectures, beliefs, arguments and mathematical knowledge did they use? 3) How did Excel support the construction, modification and extension of knowledge? The six principles for developing model eliciting activities (Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski, 2003) were used to analyze the potential of the CP activity.

It is important to mention that the professor who designed and implemented the CP activity is part of a Mexican multi-tiered research project (Doerr & Lesh, 2003) focused on the MMP. This professor participated in a training process of twelve sessions, of two hours each, where the professor, supported by researchers, a) observed the implementation of the MEA of the Paper Airplane Problem (Lesh & Doerr, 2003, University of Minnesota, 2008), b) discussed the results

with researchers, c) implemented the Hotel MEA (adapted from Aliprantis & Carmona, 2003), c) designed the CP activity presented here, and d) implemented the activity. In this document, due to lack of space, only the results of the implementation are described.

Theoretical Framework

Learning mathematics is a process of developing conceptual systems, which change continuously, modify, extend and refine from the student's interactions with their environment (teachers and peers) to solve problems (Lesh, 2010). To develop conceptual systems, the MMP (Doerr, 2016) proposes to structure experiences, so that the students express, analyze, test, revise, and refine their ways of thinking during the process of desiging powerful conceptual tools that embody significant mathematical constructions (Sriraman & Lesh, 2006). The MMP suggests the use of Model Eliciting Activities [MEA] in the classroom to encourage students to manipulate, share, modify and reuse conceptual tools to construct, describe, explain, manipulate, predict or control mathematically significant systems (Lesh & Doerr, 2003). The students manage to develop processes of mathematization; that is, to quantify, dimension, coordinate, categorize, symbolize algebraically and systematize relevant objects, relationships, actions, patterns and regularities (Lesh & Doerr, 2003). The important thing, therefore, is the process of building models, rather than the model itself.

The MMP proposed to design MEAs through the use of six principles of instructional design (Lesh & Doerr, 2003, p. 43): personal meaningfulness (reality principle), model construction, self-evaluation, model externalization (model documentation principle), simple prototype, and model generalization. These principles were used for the design of the CP activity and analysis of the data collected, since our goal was to develop skills and mathematical knowledge in the students. Technology played an important role because of its potential for the construction of representations.

Methodology

The participants in this study were a group of five students (adults immersed in the labor field with ages between 24 and 34 years) who were studying Mathematics applied to business in the first semester of the Bachelor of Administration and Bachelor of Accounting. The session was held in a computer classroom. Team 1 was formed by three students (S1, S2, S3) and Team 2 by two students (S4, S5). S1, S2 and S5 were administration students and S3 and S4 accounting. Student S1 had the best grades in the group and student S4 had the lowest grades and participated little in the classroom; In addition, S4 worked as an insurance saleswoman in extra-class hours.

> Santiago Vázquez, a graduate student of the management career of our campus UVM GDL SUR, is doing his Masters in Local Development and Territory. His teacher asked him to prepare a letter addressed to the Department of road infrastructure on the population growth of the metropolitan area of Guadalajara, so that it can be taken into account in the next road infrastructure projects.
>
> Santiago investigated and found that in 2018 the population of the metropolitan area of Guadalajara reached 4,299 million and that the average growth is 1.7% per year.
>
> For the letter to have the necessary impact in the Secretariat, Santiago needs to send a procedure that allows knowing what the population would be in the years 2020, 2022, 2024, 2030, 2040, 2041, 2100, expressing if the variation is constant and knowing in what year there will be 6 million inhabitants, 7,560 million, 8,232 million and for what year the population will double compared from 2018.
>
> Help Santiago write the letter. Describe the procedure in such a way that it can be useful to describe the population growth of any other city or the world.

Figure 1: Problem Situation of the CP Activity

The CP activity, called population growth in the metropolitan area, was composed of three pages, the first two contained the warm-up activity, based on the problem of increased vehicular traffic as a result of population growth in the metropolitan area of Guadalajara. The third page (Figure 1) contained the problem, which could be solved by means of tabular (recursive), tabular (functional relation), graphic and algebraic procedures. The data were extracted from government sources (Gutiérrez-Pulido et al, 2011).

The CP activity was implemented in a period of three and a half hours in a computer classroom, in two sessions. The phases were: 1) individual and group to read the newspaper article, 2) individual, team and group to solve the problem and 3) individual to solve a textbook problem. The role of the teacher was as an observer and facilitator. The six principles for the design of model eliciting activities were the criteria for analyzing and assessing the models elaborated by students with the use of Excel.

Results and Discussion

The potential of CP activity is analyzed in terms of the students' development of knowledge, beliefs, and mathematical abilities.

The Personal Meaningfulness Principle

The individual reading of the newspaper article allowed students to familiarize them with the context and to feel motivated to solve the activity. They mentioned their concern about the population growth of their city and the influence of this phenomenon on the road problems of the metropolitan area of Guadalajara.

The Model Construction, Model Externalization and Model Documentation Principle

Initial models. The team 1 elaborated their procedure in the Spreadsheet. The members of team 2 made first operations in their notebook with the support of the calculator; later, they worked on the Excel Spreadsheet and built a tabular and a graph representation.

Team 1, covariation and rate of change. In the data table prepared by team 1 the students detected that the population (P) varied, that is, it was different each year, and they identified how it varied. They detected a pattern of behavior, and wrote a recursive formula. The conjecture of S1 and S3 was that the population growth was linear and the rate (1.7) was constant. They did not recognize the exponential relationship.

Team 2, covariation and rate of change. Team 2, as team1, had initial difficulties in identifying whether the rate of change was constant or not. The conjecture of S5 was that the growth was linear and the rate was constant (1.7). However, S4, after performing a couple of operations, found that the variation was not constant and that they had to perform a similar procedure to the one they did on a daily basis in their work, as an insurance salesperson. Team 2 wrote a recursive relationship. Unlike team 1, it synthesized all the operations. That is, he used the population of the given year (current) to determine next year's, and obtained the annual growth of the population. This team had less difficulty identifying the exponential behavior. Although S1 (from team 1) heard S4 mention that the variation was not constant, he did not take it into account; this was due to the belief that S4 was the lowest performer in her math class.

Inverse function. Both teams had difficulties to identify in what year there would be 6, 7,560 and 8,232 million inhabitants. But, the team 2 was able to estimate possible answers from the constructed data tables in the Spreadsheet.

The final model of the teams. In the group discussion of models, each team read their letter, which described the procedures performed. When team 2 presented the graph, S1 said aloud: "it's true, growth is not constant". As mentioned in the research literature (Lesh & Yoon, 2004), the students refined their thinking about the problem. The first lineal model became a model of exponential growth.

The use of Excel allowed teams to organize the information given in the problem and write in the Spreadsheet language a relationship between the quantities, which (when being dragged) made it possible to analyze how the quantities varied. In the literature research (Friedlander, 1999) it is considered that the recursive relationship is far from supporting the construction of an algebraic representation of covariation. However, according to the NCTM (2000) it is important that in the classroom the iterative or recursive definition for the function arises and it must be compared with $P(n)$ to help students see the advantages and limitations of both. This was taken up later by the teacher.

Simple Prototype and Model Generalization Principle

S4 (team 2) identified that the exponential model was useful to solve a broader range of situations. Not so the other students.

Extension of Student Knowledge with Teacher-led Support

After the group discussion, the teacher, based on the constructed models, promoted the generalization and writing of the algebraic representation $P(n) = 4.299(1.017)^n$ to encourage the discussion of the students in terms of covariation and use of the inverse function. In a later session the professor proposed the resolution of a textbook compound interest word problem. The students were able to solve the problem; they explained to the teacher the behavior of the exponential growth involved, from which, they managed to use their knowledge to describe a problematic situation in another context.

Conclusions

With respect to the research questions initially raised, the following may be mentioned. The use of Excel for the elaboration of models with tabular representations to solve the problem allowed the students to focus on the process of reviewing how the quantities varied, by dragging the recursive formula constructed with the language of the Spreadsheet. The use of graphic representation enabled the team 1 to modify their conjectures, regarding linear behavior in the

group discussion and identify the exponential behavior. While it is true, the students did not build an algebraic relationship for $P(t)$, but they did identify the recursive relationship in the Spreadsheet language, which allowed them to answer several of the questions posed and, in addition, to understand the situation. The teacher's support was fundamental to build and give meaning to the algebraic relationship.

The resolution of the CP activity allowed the students to construct several models, manipulate them, share and predict the behavior of the situation. They expressed their ideas about variation and rate of change, analyzed and revised them; they observed patterns, relationships and regularities, that is, students developed mathematical skills and knowledge, which is important in learning mathematics. One aspect that was not worked in the classroom was the exploration of the dynamic nature of the models by changing the initial quantities and the rate of change to generate family of problems; it is still necessary to promote and analyze these actions in subsequent studies.

References

Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: A models and modeling perspective. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., & O'Neil, A. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. In C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Doerr, H. M. & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. In O. Zaslavsky (ed.). *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *2*, pp. 337-344. Haifa, Israel.

Gutiérrez, H., Mariscal, M., Almanzor, P., Ayala, M., Hernández, V., & Lara, G. (2011). *Diez problemas de la población de Jalisco: Una perspectiva Sociodemográfica.* Guadalajara, México: Dirección de Publicaciones del Gobierno de Jalisco.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojeswski, J. S. (2003). Model Development Sequences. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind in which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 205-226.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Sriraman, B., & Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM*, *38*(3), 247-254.

University of Minnesota. (2008). Retrieved from http://www.region11mathandscience.org/trainingResources/files/Problem%20Solving/Teachers/MEA/Paper_Airplane_MEA.pdf